ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ HOÀNG SƠN

ĐỊNH LÝ CASEY VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ HOÀNG SƠN

ĐỊNH LÝ CASEY VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: **Phương pháp Toán sơ cấp**
Mã số: **8460113**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. TRỊNH THANH HẢI

Thái Nguyên - 2018

Mục lục

Mở đầu

Định lí Casey được đặt theo tên nhà toán học người Ireland John Casey, nó được coi như một mở rộng của Định lí Ptolemy. Bài báo Luis González [3] đã giới thiệu về Định lí Casey như là một mở rộng của Định lí Ptolemy. Tiếp theo, Kin-Yin Li [5] tiếp tục giới thiệu về định lí này và một số ứng dụng của nó. Ở Việt Nam, Trần Quang Hùng đã công bố [4] về bất đẳng thức Casey.

Trong thời gian qua đã có một số đề thi học sinh giỏi trong nước và quốc tế được giải quyết trọn vẹn trên cơ sở ứng dụng Định lí Casey. Với mong muốn trình bày lại một cách có hệ thống nội dung của hai bài báo trên và giới thiệu thêm một số ứng dụng của Định lí Casey vào giải một số bài toán hình học dành cho học sinh giỏi, chúng tôi đã chọn đề tài *"Định lí Casey và ứng dụng"* làm chủ đề cho luận văn thạc sĩ.

Luận văn ngoài phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo, được trình bày trong hai chương.

- *Chương 1. Một số kiến thức liên quan.*
- *Chương 2. Định lí Casey và ứng dụng.*

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành với sự hướng dẫn của PGS.TS. Trịnh Thanh Hải (Giảng viên Trường ĐH Khoa học - Đại học Thái Nguyên).

Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt bài toán và tận tình hướng dẫn để luận văn này được hoàn thành.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán – Tin, cùng các giảng viên đã tham gia giảng dạy, đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập và nghiên cứu.

Tác giả xin cảm ơn tập thể lớp Cao học Toán khóa 10 (2016-2018) đã động viên và giúp đỡ tác giả rất nhiều trong suốt quá trình học tập.

Tác giả muốn gửi những lời cảm ơn tốt đẹp đến các nhà khoa học trong hội đồng đánh giá luận văn, đặc biệt là đến các phản biện của đề tài này. Những góp ý, thảo luận của họ đã giúp tác giả sửa chữa và hoàn thiện luận văn này.

Nhân dịp này, tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Sở Giáo dục và Đào tạo Hải Phòng, Ban Giám hiệu và các đồng nghiệp ở Trường THPT Phạm Ngũ Lão đã tạo điều kiện cho tác giả hoàn thành tốt nhiệm vụ học tập và công tác của mình.

Cuối cùng, tác giả muốn dành những lời cảm ơn đặc biệt nhất đến đại gia đình vì những động viên và chia sẻ những khó khăn để tác giả hoàn thành luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 25 tháng 11 năm 2018

Tác giả

Đỗ Hoàng Sơn

Chương 1

Một số kiến thức liên quan

Trong chương này chúng tôi sẽ trình bày về Định lí Ptolemy cùng các ví dụ minh họa việc ứng dụng vào giải bài tập liên quan đến tứ giác nội tiếp trong đường tròn.

1.1. Định lí Ptolemy

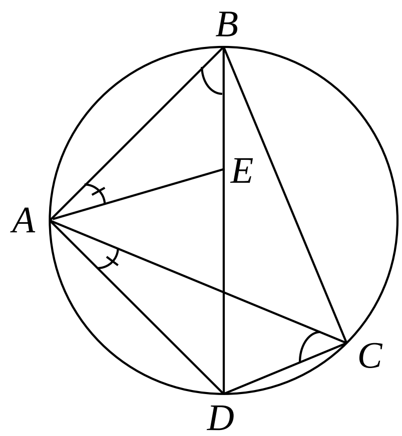
Trước hết, trong mục này chúng tôi trình bày nội dung Định lí mang tên nhà Toán học người Hy Lạp Claudius Ptolemy[1] cùng một số hệ quả quan trọng của nó.

Định lý 1.1 (Định lí Ptolemy)**.** *Tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp trong một đường tròn khi và chỉ khi tich hai đường chéo bằng tổng các tích của các cạnh đối diện, tức là*

$$AC.BD = AB.CD + BC.AD \tag{1.1}$$

Chứng minh. Chọn điểm E nằm trong tứ giác $ABCD$ sao cho $\widehat{ABE} = \widehat{ACD}$ và $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$. Xét các cặp tam giác đồng dạng ABE và ACD, ABC và AED, suy ra $AB.CD = BC.AD = AC(BE + ED)$, sau đó tìm điều kiện cần và đủ để điểm E nằm trên đoạn thẳng BD. □

[1](Claudius Ptolemy : 100-187 TCN)

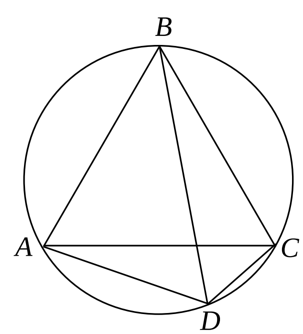


Định lí Ptolemy có thể xem là sự khái quát hóa của Định lí Pythagoras trong trường hợp tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật, lúc đó $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Định lí 1.1 có các hệ quả sau đây:

Hệ quả 1.1. *Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ với ΔABC đều, ta có*

$$BD = AD + CD.$$



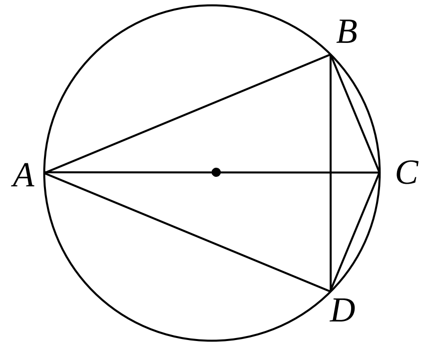
Chứng minh. Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên theo Định lí Ptolemy ta có

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

Vì $AB = BC = CA$ nên ta suy ra

$$CA \cdot CD + AD \cdot CA = AC \cdot BD.$$

Vậy $CD + AD = BD$. $\square$



Hệ quả 1.2. *Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ với $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$, ta có $BD = AC \sin \widehat{BAD}$.*

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}
AC \sin \widehat{BAD} &= AC \sin\left(\widehat{BAC} + \widehat{DAC}\right) \\
&= AC \sin\left(\widehat{BAC} + \widehat{DAC}\right) \\
&= AC\left(\sin \widehat{BAC} \cdot \cos \widehat{DAC} + \cos \widehat{BAC} \cdot \sin \widehat{DAC}\right) \\
&= AC\left(\frac{BC}{AC} \cdot \frac{AD}{AC} + \frac{DC}{AC} \cdot \frac{AB}{AC}\right) \\
&= AC \cdot \frac{BC \cdot AD + DC \cdot AB}{AC} \\
&= BC \cdot AD + DC \cdot AB \\
&= BD.
\end{aligned}$$

Vậy phép chứng minh được hoàn thành. □

Thực ra, Hệ quả 1.2 đúng nếu A, B, C, D nằm trên một đường tròn (với thứ tự tùy ý) và

$$\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ,$$

từ Định lí sine ta có $\dfrac{BD}{\sin \widehat{BAD}}$ bằng đường kính AC của đường tròn ngoại tiếp ΔBAD.

1.2. Một số ứng dụng của Định lí Ptolemy

Trong mục này, luận văn trình bày một vài ứng dụng của Định lí Ptolemy thông qua một số bài toán thi Olympic và thi học sinh giỏi.

Bài toán 1.1 (IMO 1995). *Cho $ABCDEF$ là lục giác lồi với*

$$AB = BC = CD, \quad DE = EF = FA, \quad \widehat{BCD} = \widehat{EFA} = 60^\circ.$$

Gọi G và H là hai điểm trong lục giác thỏa mãn $\widehat{AGB} = \widehat{DHE} = 120^\circ$. Chứng minh rằng

$$AG + GB + GH + DH + HE \geq CF.$$

Giải. Gọi X, Y là các điểm nằm ngoài lục giác thỏa mãn ΔABX và ΔDEY đều. Vậy $DBXAEY$ là ảnh của $ABCDEF$ qua phép đối xứng trục BE. Suy ra $CF = XY$. Khi đó ta có

$$\widehat{AXB} + \widehat{AGB} = \widehat{DYE} + \widehat{DHE} = 180^\circ.$$

Như vậy $AXBG$ và $DHEY$ là các tứ giác nội tiếp. Theo Hệ quả 1.1 ta có $XG = AG + GB$ và $HY = DH + HE$. Vì thế

$$AG + GB + GH + DH + HE = XG + GH + HY \geq XY = CF.$$

□

Bài toán 1.2 (IMO 1996). *Cho P là điểm nằm trong ΔABC thỏa mãn*

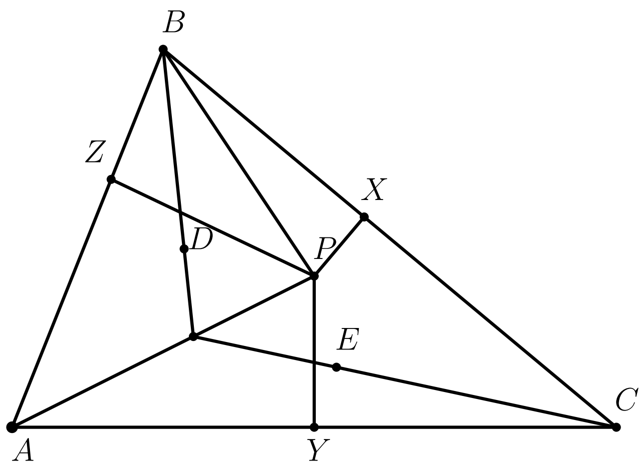
$$\widehat{APB} - \widehat{ACB} = \widehat{APC} - \widehat{ABC}.$$

Gọi D, E lần lượt là tâm vòng tròn nội tiếp của ΔAPB, ΔAPC. Chứng minh rằng AP, BD và CE cắt nhau tại một điểm.

Giải. Trước hết, ta phải chỉ ra các phân giác BD, CE tương ứng của các góc $\widehat{ABP}$, $\widehat{ACP}$ cắt nhau tại một điểm trên AP.

Gọi chân của đường vuông góc hạ từ P xuống BC, CA, AB lần lượt là X, Y, Z. Vậy thì $AZPY$, $BXPZ$, $CYPX$ là các tứ giác nội tiếp. Ta có

$$\widehat{APB} - \widehat{ACB} = \widehat{YAP} + \widehat{XBY} = \widehat{YZP} + \widehat{XZP} = \widehat{YZX}.$$



Chứng minh tương tự ta có $\widehat{APC} - \widehat{ABC} = \widehat{XYZ}$.

Tam giác XYZ có góc $\widehat{YZX} = \widehat{XYZ}$ nên $XZ = XY$. Theo Hệ quả 1.2 ta có

$$XZ = BP \sin \widehat{ABC} \quad \text{và} \quad XY = CP \sin \widehat{ACB}.$$

Vì $XZ = XY$ nên $BP \sin \widehat{ABC} = CP \sin \widehat{ACB}$. Ta có

$$\frac{BP}{CP} = \frac{\sin \widehat{ACB}}{\sin \widehat{ABC}}. \tag{1.2}$$

Áp dụng Định lí sine cho tam giác ABC ta có

$$\frac{AB}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{AC}{\sin \widehat{ABC}}. \qquad \text{Suy ra} \quad \frac{\sin \widehat{ACB}}{\sin \widehat{ABC}} = \frac{AB}{AC}. \tag{1.3}$$

Từ (1.2) và (1.3) suy ra

$$\frac{AB}{BP} = \frac{AC}{CP}. \tag{1.4}$$

Gọi H là giao điểm của BD và AP. Vì BH là đường phân giác của góc $\widehat{ABP}$ nên

$$\frac{AB}{BP} = \frac{HA}{HP}. \tag{1.5}$$

Gọi K là giao điểm của CE và AP. Vì CK là đường phân giác của góc $\widehat{ACP}$ nên

$$\frac{AC}{CP} = \frac{KA}{KP}. \tag{1.6}$$